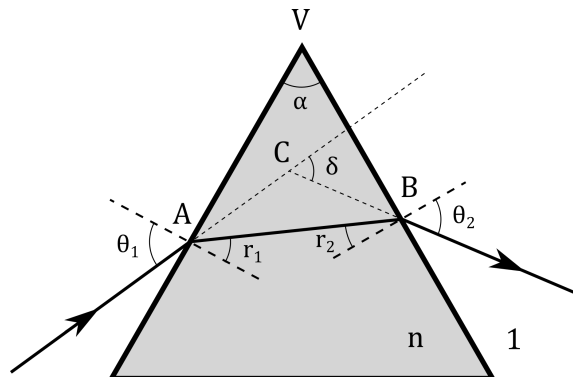


FSC5123 / FSC5144. Experimento 11. Anexo.

Relação entre índice de refração e ângulo de desvio mínimo no prisma

Figura 1: α é o ângulo formado pelo prisma em seu vértice V, θ_1 e θ_2 são os ângulos entre o raio luminoso e as normais de cada superfície na entrada e na saída externamente ao prisma, r_1 e r_2 são os ângulos entre o raio luminoso e as normais de cada superfície na entrada e na saída internamente ao prisma, δ é o **ângulo de desvio** do raio luminoso provocado pelo prisma.



A figura acima representa o raio de luz atravessando um prisma isósceles e sendo desviada por um ângulo δ , graças à diferença de índice de refração entre o ar ($n_{\text{ar}} \approx 1$) e o material que constitui o prisma (n). **O nosso objetivo é encontrar a relação entre o ângulo de desvio de desvio mínimo D e o índice de refração n do prisma.**

Abaixo, seguem quatro equações que relacionam os ângulos representados na figura:

$$\triangle ABV : \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - r_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r_2\right) = \pi \Rightarrow \boxed{\alpha = r_1 + r_2} \quad (1)$$

$$\triangle ABC : (\pi - \delta) + (\theta_1 - r_1) + (\theta_2 - r_2) = \pi \Rightarrow \boxed{\delta = \theta_1 + \theta_2 - \alpha} \quad (2)$$

$$\text{ponto A : } \boxed{\text{sen } \theta_1 = n \text{ sen } r_1} \quad (3)$$

$$\text{ponto B : } \boxed{\text{sen } \theta_2 = n \text{ sen } r_2} \quad (4)$$

As duas primeiras vêm do fato de que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° ou π radianos. As duas últimas são aplicações diretas da lei de Snell aos pontos A e B.

O primeiro passo é utilizar estas equações para mostrar que o ângulo de desvio δ é mínimo quando $\theta_1 = \theta_2$, ou seja, quando os ângulos de incidência e de saída são iguais.

O desvio é mínimo quando a derivada de δ em relação a θ_1 é nula. Por isso, vamos derivar as quatro equações acima em relação a θ_1 e analisar o caso em que

$d\delta/d\theta_1 = 0$:

$$(1) \Rightarrow \frac{dr_1}{d\theta_1} = -\frac{dr_2}{d\theta_1} \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -1 \quad (\text{onde usamos } \frac{d\delta}{d\theta_1} = 0) \quad (6)$$

$$(3) \Rightarrow \cos \theta_1 = n \cos r_1 \frac{dr_1}{d\theta_1} \quad (7)$$

$$(4) \Rightarrow \cos \theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = n \cos r_2 \frac{dr_2}{d\theta_1} \quad (8)$$

Ao substituir as duas primeiras equações nas duas últimas, obtemos duas outras em que apenas a derivada de r_2 aparece. Basta então dividir uma equação pela outra para encontrar uma expressão simples relacionando os cossenos dos ângulos θ_1 , θ_2 , r_1 e r_2 , como feito abaixo:

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = -n \cos r_1 \frac{dr_2}{d\theta_1} \\ \cos \theta_2 = -n \cos r_2 \frac{dr_2}{d\theta_1} \end{cases} \Rightarrow \cos \theta_1 \cos r_2 = \cos \theta_2 \cos r_1 \quad (9)$$

Usando as equações (3) e (4), podemos expressar os ângulos r_1 e r_2 em termos de θ_1 e θ_2 , respectivamente. Desta maneira, a equação (9) resulta em:

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 \theta_1) \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_2}{n^2}\right) &= (1 - \sin^2 \theta_2) \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{n^2}\right) \\ \sin^2 \theta_1 = \sin^2 \theta_2 &\Rightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Este resultado mostra que, quando o ângulo de desvio é mínimo, θ_1 e θ_2 são iguais. Pela equação (9), conclui-se que os ângulos internos r_1 e r_2 também são iguais, de modo que o trajeto do raio de luz no interior do prisma é paralelo à sua base.

Assim, na condição de desvio mínimo, temos

$$\boxed{\theta_1 = \theta_2 = \theta} \quad \text{e} \quad \boxed{r_1 = r_2 = r}, \quad (11)$$

e as equações (1) a (4) viram as três abaixo,

$$\begin{cases} \alpha = 2r \\ D = 2\theta - \alpha \\ \sin \theta = n \sin r \end{cases}, \quad (12)$$

onde D é o valor mínimo de δ .

A partir destas equações, obtém-se a expressão do índice de refração do prisma em termos do ângulo α formado em seu vértice e do **ângulo de desvio mínimo** D :

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{D + \alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}. \quad (13)$$