

Exp. 6B

Circuito RC em corrente alternada

FSC5143 - Laboratório de Física III

lemo.ufsc.br

Versão de 17 de novembro de 2020

1 Objetivos

Neste experimento, observaremos o comportamento do circuito RC (associação em série de um resistor (R) e um capacitor (C)) alimentado por uma fonte de tensão e corrente alternadas, como mostra a Figura 1. Os objetivos principais são:

- Medir tensões no circuito RC;
- Construir o diagrama de tensões do circuito;
- Estudar o comportamento do circuito conforme variação da frequência da fonte: circuito passa-baixa ou circuito passa-alta?

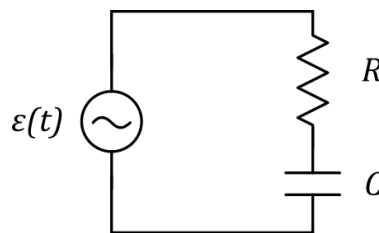


Figura 1 Circuito RC alimentado por uma fonte de tensão de alternada $\varepsilon(t)$ de frequência angular ω , a qual pode ser variada.

2 Introdução à tensão/corrente alternada

Tensão alternada é aquela que varia periodicamente no tempo, oscilando tipicamente entre valores positivos e negativos. Trataremos aqui do tipo mais simples de oscilação: a senoidal/cossenoidal. Essa oscilação tem uma amplitude, representada aqui por V_m (tensão máxima), uma frequência angular $\omega = 2\pi f$ bem definida e uma fase ϕ :

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi). \quad (1)$$

Nas situações com as quais trabalharemos aqui, ao alimentar um circuito com uma tensão de frequência angular ω , a corrente também oscilará com a mesma frequência (mas possivelmente com uma fase distinta):

$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \phi'). \quad (2)$$

Isto só não ocorrerá em situações em que há correntes transientes (por exemplo, logo após ligar ou desligar o circuito) ou efeitos de eletrônica não linear, o que sai do escopo desta disciplina.

2.1 Tensão eficaz e corrente eficaz

Geralmente, os voltímetros e amperímetros configurados para tensão/corrente alternada mostram na tela o valor da tensão eficaz ou da corrente eficaz, ao invés da tensão máxima V_m e da corrente máxima I_m .

Conceitualmente, o *valor eficaz* de uma corrente alternada é o valor da corrente contínua necessária para dissipar a mesma quantidade de calor que a corrente alternada numa dada resistência ôhmica e num mesmo intervalo de tempo. Matematicamente, o valor eficaz é a *raiz do valor quadrático médio* da corrente, o que pode ser escrito da seguinte forma (o mesmo se aplicando à tensão):

$$I_{rms} = \sqrt{\overline{I^2(t)}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt} \quad \text{e} \quad V_{rms} = \sqrt{\overline{V^2(t)}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) dt}, \quad (3)$$

onde o símbolo $\overline{A(t)}$ denota média temporal de uma grandeza $A(t)$ e $T = 1/f = 2\pi/\omega$ é o período de oscilação da corrente alternada. O subscrito *rms* faz referência ao termo em língua inglesa *root mean square*. É comum chamar o valor eficaz de *valor RMS*.

No caso de uma corrente cossenoidal, como a descrita pela equação (2), é fácil calcular a integral acima. Se você o fizer, notará que o resultado depende apenas do valor máximo da corrente, I_m , o mesmo valendo para a tensão:

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

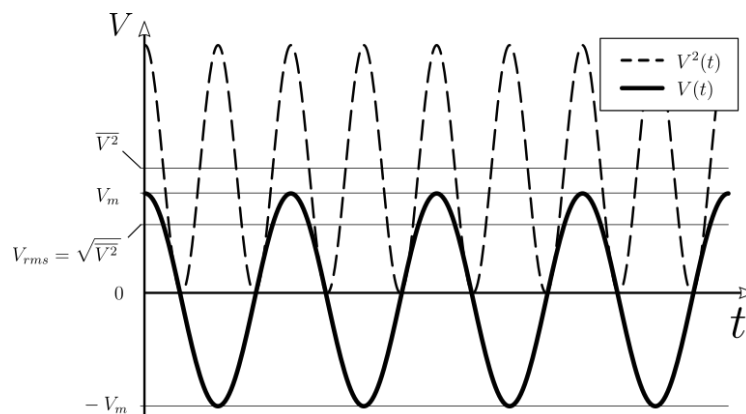


Figura 2 Interpretação gráfica do valor RMS, que vale a amplitude dividida por $\sqrt{2}$.

2.2 Notação complexa

Grandezas oscilantes como a tensão da equação (1) podem ser representadas com um tipo de notação que usa números complexos, a qual chamamos aqui de *notação complexa*. Essa notação é útil tanto na visualização de resultados quanto na resolução de equações diferenciais. Então, embora seja estranho falar de números complexos para representar tensões elétricas, esta é uma notação que nos facilitará a vida!

A notação complexa se baseia na fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (5)$$

que relaciona funções trigonométricas à função exponencial. Nesta equação, $i = \sqrt{-1}$ é o número imaginário.

De acordo com a fórmula de Euler, a parte real da exponencial complexa é a função cosseno: $\cos \theta = \operatorname{Re}\{e^{i\theta}\}$. Graças a essa propriedade, podemos reescrever a equação (1) como

$$V(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{V}(t)\}, \quad \text{com} \quad \tilde{V}(t) = V_m e^{i(\omega t + \phi)}, \quad (6)$$

onde $\tilde{V}(t)$ é a representação complexa da tensão oscilante $V(t)$. Baseando-se na equação acima, podemos ainda escrever

$$\tilde{V}(t) = \bar{V} e^{i\omega t}, \quad \text{com} \quad \bar{V} = V_m e^{i\phi}, \quad (7)$$

onde \bar{V} é a chamada *amplitude complexa* da tensão, que é um número complexo com módulo V_m e argumento ϕ . Note que o módulo de \bar{V} corresponde à amplitude de oscilação da tensão e seu argumento é a fase dessa mesma oscilação.

Se representados no plano complexo, \bar{V} é um ponto fixo e $\tilde{V}(t)$ é um ponto que descreve uma trajetória circular com frequência angular ω partindo de \overline{V} em $t = 0$.

O mesma notação pode ser usada para descrever o comportamento da corrente, tal qual descrita pela equação (2).

$$I(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{I}(t)\} = \operatorname{Re}\{\bar{I} e^{i\omega t}\}, \quad (8)$$

onde $\bar{I} = I_m e^{i\phi'}$.

Sem perda de generalidade, nós adotamos daqui em diante a convenção de que a oscilação de corrente serve como referência de fase, ou seja,

$$\boxed{\phi' \equiv 0}. \quad (9)$$

Deste modo, o valor da fase ϕ da tensão, sozinho, nos dirá se a oscilação de tensão está adiantada ou atrasada em relação à oscilação de corrente. Se $\phi > 0$, a tensão está adiantada; se $\phi < 0$, ela está atrasada.

Impedância: Resistência e Reatância

Em corrente alternada, é possível generalizar o conceito de resistência dividindo a amplitude complexa da tensão pela da corrente, obtendo o que chamamos de *impedância*:

$$Z = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_m e^{i\phi}}{I_m e^{i\phi'}} = \frac{V_m}{I_m} e^{i\phi}, \quad (10)$$

onde adotamos a convenção mencionada acima de que $\phi' = 0$.

O módulo de Z é a razão entre as amplitudes da tensão e da corrente: $|Z| = V_m/I_m$ e seu argumento (ou fase) ϕ é a fase da tensão, que acusa se esta está adiantada ou atrasada em relação à corrente, como já comentado.

Assim como para todo número complexo, existe a *forma polar* e a *forma cartesiana* de escrever a impedância:

$$\text{Forma polar : } Z = |Z| e^{i\phi}, \quad (11)$$

$$\text{Forma cartesiana : } Z = R + iX. \quad (12)$$

A forma cartesiana evidencia as partes real e imaginária do número complexo. A parte real da impedância é a *resistência*, enquanto a parte imaginária é chamada de *reatância*, que tipicamente surge no circuito quando há capacitor e/ou indutor. R e X são grandezas reais e mensuráveis num circuito de corrente alternada. $|Z|$ e ϕ , também. O módulo de Z pode ser escrito em termos de R e X como

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (13)$$

3 Teoria Básica

3.1 Dinâmica do circuito RC

Na experiência em que estudamos a carga e a descarga de um capacitor, vimos que, enquanto a tensão num resistor ôhmico é diretamente proporcional à corrente que o percorre, a tensão no capacitor é diretamente proporcional à carga acumulada nas suas placas.

Componente	Propriedade	Unidade (SI)	Tensão
Capacitor	capacitância (C)	farad (F)	$V_C = \frac{1}{C} Q$
Resistor	resistência (R)	ohm (Ω)	$V_R = R \frac{dQ}{dt} = RI$

Tabela 1 A tensão em cada um dos componentes do circuito RC, expressa em termos da carga acumulada no capacitor, Q , cuja derivada temporal dQ/dt é a corrente elétrica I .

Iniciamos a modelagem matemática do circuito RC da Fig. 1 aplicando a segunda lei de Kirchhoff (lei das malhas) à única malha do circuito:

$$V_R(t) + V_C(t) = \varepsilon(t) \quad (14)$$

onde $V_R(t)$ e $V_C(t)$ são as tensões no resistor e no capacitor, que variam a cada instante de tempo. A tensão aplicada, portanto, se distribui entre os dois componentes de tal forma que a soma $V_R(t) + V_C(t)$ é sempre igual à tensão da fonte $\varepsilon(t)$, qualquer que seja o instante de tempo considerado.

A tensão da fonte, por sua vez, pode ser escrita como:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \phi), \quad (15)$$

onde ϕ é uma fase que deverá ser escolhida *a posteriori* de tal modo que a fase da oscilação **da corrente** fique nula, conforme a convenção (9) mencionada na seção anterior. Vejamos, na sequência, como fazer isso.

Inserindo, na equação (14) acima, as tensões V_R e V_C da Tabela 1, chega-se numa equação diferencial para a carga Q do capacitor:

$$Q'(t) + \frac{Q(t)}{RC} = \frac{\varepsilon_m}{R} \cos(\omega t + \phi), \quad (16)$$

em que $Q'(t)$ representa a derivada temporal de Q .

Ao resolver essa equação, encontra-se a carga do capacitor em função do tempo, $Q(t)$. O(A) aluno(a) interessado(a) em se aprofundar, pode encontrar os métodos de resolução e cálculos similares nas referências fornecidas de livros de Física Básica. Para a realização deste experimento, focamos na solução puramente oscilatória (sem transientes de tensão ou de corrente). O resultado é:

$$Q(t) = Q_m \cos(\omega t + \phi - \varphi), \quad (17)$$

onde

$$Q_m = \frac{\varepsilon_m C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \text{e} \quad \varphi = \text{tg}^{-1}(\omega RC). \quad (18)$$

Para obter a corrente $I(t)$, basta tomar a derivada da equação (17), levando em conta as expressões (18). Resulta o seguinte:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = I_m \cos(\omega t + \phi - \varphi + \pi/2), \quad (19)$$

onde

$$I_m = \frac{\varepsilon_m \omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (20)$$

Impondo que a fase da corrente seja nula, ou seja, que $\phi - \varphi + \pi/2 = 0$, obtemos o resultado final, sumarizado abaixo:

$$I(t) = I_m \cos(\omega t) \quad (21a)$$

$$Q(t) = Q_m \cos(\omega t - \pi/2) \quad (21b)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \phi) \quad (21c)$$

$$\phi = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) < 0 \quad (21d)$$

Estes resultados nos mostram que a carga do capacitor oscila com atraso de $\pi/2$ em relação à corrente e que a tensão da fonte oscila com um atraso menor, de $0 < \phi < \pi/2$.

A corrente no circuito oscila com a mesma frequência angular ω que a fonte, apresentando apenas uma fase diferente. O ângulo ϕ representa o *ângulo de defasagem* (ou simplesmente *defasagem*) entre a *fem* da fonte e a corrente no circuito, assumindo valores entre $-\pi/2$ e $\pi/2$. Por exemplo, se $\phi = 0$, então a tensão e a corrente atingem seus valores máximos sempre simultaneamente: elas estão *em fase*. Já se ϕ é positivo, a oscilação de corrente está adiantada em relação à oscilação de tensão.

Fundamental observar ainda que esta defasagem depende da frequência angular ω da fonte. Por exemplo, quando ω tende a zero, então ϕ tende a $-\pi/2$, ou seja, corrente e tensão tendem a ficar *em quadratura*¹ para frequências baixas.

O quadro abaixo resume o comportamento da carga e da corrente no circuito, bem como de suas defasagens nos regimes de baixas e altas frequências.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \infty$
Carga	$Q_m \rightarrow \varepsilon_m C$	$Q_m \rightarrow 0$
	$\phi_C \rightarrow 0$	$\phi_C \rightarrow -\pi/2$
Corrente	$I_m \rightarrow 0$	$I_m \rightarrow \varepsilon_m/R$
	$\phi_I \rightarrow \pi/2$	$\phi_I \rightarrow 0$

Tabela 2 Comportamento da carga no capacitor e da corrente na malha nos regimes de baixas e altas frequências. São analisadas as amplitudes Q_m e I_m , bem como as fases $\phi_C = \phi - \pi/2$ e $\phi_I = \phi$.

Finalmente, vamos agora deduzir as tensões no resistor e no capacitor, usando novamente as expressões:

$$V_R(t) = RI(t), \quad (22)$$

$$V_C(t) = Q(t)/C. \quad (23)$$

Com isso, obtemos, a partir das equações (17) e (19):

$$V_R(t) = \frac{\varepsilon_m \omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t) \quad (24a)$$

$$V_C(t) = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \pi/2) \quad (24b)$$

Devido ao termo de fase extra $-\pi/2$ na expressão de $V_C(t)$, conclui-se que as oscilações de tensão no resistor e no capacitor estão *em quadratura*. Fica como exercício para o(a) leitor(a) verificar que esses resultados respeitam as equações (14) e (15), ou seja, mostrar que $V_R(t) + V_C(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t)$ (aplicação da lei das malhas).

¹ Diz-se que duas grandezas oscilam em quadratura quando a diferença de fase entre as oscilações é de $\pi/2$.

3.2 Circuito RC como filtro de frequências

Vamos agora tomar como base os resultados precedentes para analisar a dinâmica do circuito conforme a frequência ω é variada. De fato, as *amplitudes de oscilação* nos componentes do circuito RC em corrente alternada dependem da frequência². Conforme as equações anteriores, essas amplitudes dependentes de ω valem

$$\boxed{V_{R,m} = \frac{\varepsilon_m \omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{V_{C,m} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}} \quad (25)$$

e estão representadas graficamente na Figura 3.

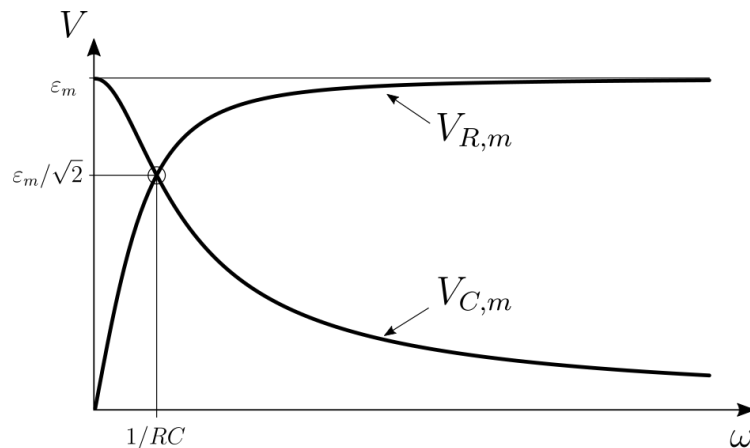


Figura 3 Comportamento das amplitudes de oscilação de tensão no circuito RC conforme se varia a frequência da fonte.

Pelo gráfico, nota-se que a tensão no capacitor praticamente se iguala à da fonte (em amplitude) para frequências baixas, ao passo que cai tendendo a zero quando $\omega \rightarrow \infty$. Em outras palavras, o capacitor fica restrito a valores baixos de tensão quando a fonte oscila “rápido demais”. Isso ocorre porque o processo de carga do capacitor está associado ao tempo característico RC . Se a fonte oscila com período muito menor que RC , ou seja, com frequência muito maior que $1/RC$, o capacitor não atinge carga máxima a tempo. Portanto, ele “reage” pouco diante de frequências altas. Isto tem a ver com o conceito de *reatância*, que será definido mais adiante.

Ainda de acordo com o gráfico, existe uma frequência para a qual as amplitudes de tensão do capacitor e do resistor são iguais. Essa frequência é conhecida como **frequência de corte** do circuito RC e depende apenas do tempo característico $\tau = RC$:

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi RC}} \quad (26)$$

É acima dessa frequência que a tensão no capacitor fica menor que a tensão no resistor (em amplitude). Ela é chamada de frequência de corte pois o capacitor (associado ao resistor) pode servir como um filtro de frequências que deixa passar

² O mesmo vale para as tensões RMS, que diferem das tensões máximas por uma constante multiplicativa: $V_{rms} = V_m/\sqrt{2}$.

predominante as frequências abaixo de f_c , “cortando” parcialmente as frequências acima desse valor (filtro passa-baixa). Já o resistor tem uma tensão que oscila com amplitude maior para frequências acima desse valor (filtro passa-alta).

É comum conectar o circuito RC a outros mais complexos no intuito de filtrar as frequências que serão transmitidas ao outro circuito. Se este estiver conectado ao resistor, ele enxergará as frequências mais altas; se estiver conectado ao capacitor, ele receberá principalmente as frequências mais baixas. Filtros de frequência de outros tipos podem ser construídos com associações mais complexas de capacitores e resistores, assim como de indutores. Tais filtros encontram aplicações abundantes na engenharia de som, no tratamento de sinais de maneira geral e até na pesquisa básica, entre outros.

3.3 Usando notação complexa para interpretar os resultados

Os resultados (24) podem ser escritos em notação complexa (fasores) como

$$\tilde{V}_R(t) = V_{R,m} e^{i\omega t}, \quad (27)$$

$$\tilde{V}_C(t) = V_{C,m} e^{i(\omega t - \pi/2)}, \quad (28)$$

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \varepsilon_m e^{i(\omega t + \phi)}, \quad -\pi/2 < \phi < 0, \quad (29)$$

onde

$$V_{R,m} = \frac{\varepsilon_m \omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad (30)$$

$$V_{C,m} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (31)$$

Note que

$$(V_{R,m})^2 + (V_{C,m})^2 = (\varepsilon_m)^2. \quad (32)$$

Graficamente, é possível perceber que os fasores $\tilde{V}_R(t)$ e $\tilde{V}_C(t)$ se somam vetorialmente resultando em $\tilde{\varepsilon}(t)$, como mostra a Figura 4 especificamente para $t = 0$.

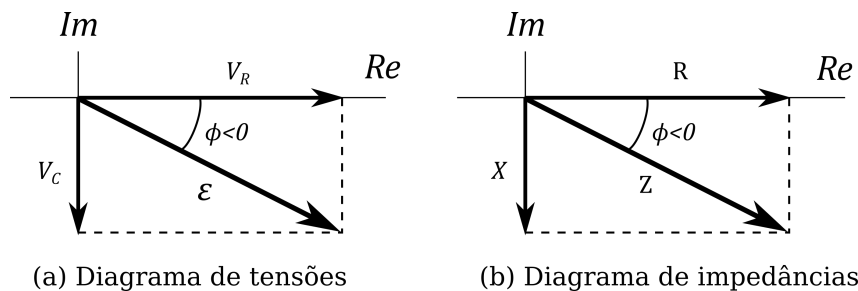


Figura 4 (a) Diagrama de tensões: representação dos fasores das tensões V_R , V_C e ε ; (b) Diagrama de impedâncias, onde X é a reatância capacitiva

No caso da Figura 4(a), estes fasores giram no sentido anti-horário todos com velocidade angular ω . Na figura (b), por sua vez, as grandezas complexas ali representadas são independentes do tempo. Este gráfico também relembra o fato de

que

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2},$$

onde

$$X = X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (33)$$

é a *reatância capacitiva*.

Daí resulta que

$$V_{R,m} = \frac{\varepsilon_m R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{\varepsilon_m R}{|Z|}, \quad (34)$$

$$V_{C,m} = \frac{\varepsilon_m / (\omega C)}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{\varepsilon_m / (\omega C)}{|Z|}. \quad (35)$$

É possível ainda estabelecer generalizações da lei de Ohm usando a notação complexa e as impedâncias, conforme a equação (10), lembrando que as grandezas com barra (como \bar{V} e \bar{I}) são números complexos com módulo e fase e representam a amplitude e a fase da oscilação:

$$\begin{cases} \bar{V}_R = Z_R \bar{I} \\ \bar{V}_C = Z_C \bar{I} \\ \bar{\varepsilon} = Z \bar{I} = (Z_R + Z_C) \bar{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{V}_R = R \bar{I} \\ \bar{V}_C = -i \frac{1}{\omega C} \bar{I} \\ \bar{\varepsilon} = (R - i \frac{1}{\omega C}) \bar{I} \end{cases} . \quad (36)$$

Reescrevendo tudo isso em módulo, temos equações que se conectam diretamente com as amplitudes que se medem em laboratório:

$$\begin{cases} V_{R,m} = |Z_R| I_m \\ V_{C,m} = |Z_C| I_m \\ \varepsilon_m = |Z| I_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{R,m} = R I_m \\ V_{C,m} = \frac{1}{\omega C} I_m \\ \varepsilon_m = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} I_m \end{cases} . \quad (37)$$

Nas equações acima, os valores máximos (amplitudes) podem ser todos substituídos em conjunto pelos valores RMS ($V_{rms} = V_m / \sqrt{2}$ e $I_{rms} = I_m / \sqrt{2}$). Portanto, quando for conveniente, podemos usar:

$$\begin{cases} V_{R,rms} = R I_{rms} \\ V_{C,rms} = \frac{1}{\omega C} I_{rms} \\ \varepsilon_{rms} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} I_{rms} \end{cases} . \quad (38)$$

4 Referências Bibliográficas

- Halliday, Resnick & Walker, *Fundamentos de Física*, Vol. 3, Ed. LTC
- Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, Vol. 3, Ed. Blucher
- Piacentini, Grandi, Hofmann, de Lima & Zimmerman, *Introdução ao Laboratório de Física*, Ed. da UFSC.
- Helene & Vanin, *Tratamento estatístico de dados em física experimental*, Ed. Blucher

5 Relação do material

- 01 fonte AC (oscilador);
- 01 osciloscópio;
- 01 resistor metálico 100Ω ($\pm 10\%$);
- 01 capacitor $0,68 \mu\text{F}$ ($\pm 10\%$);
- Cabos para conexões elétricas.

6 Esquema Experimental

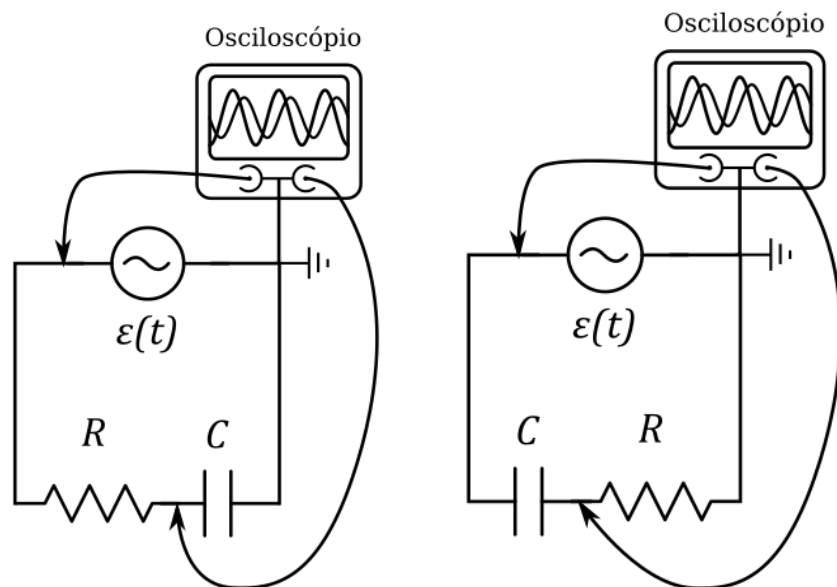


Figura 5 À esquerda, esquema de montagem da primeira parte, para medida de V_C . À direita, montagem da segunda parte, para medida de V_R .

7 Procedimento Experimental

PRIMEIRA PARTE - Medindo V_C

1. Monte o circuito conforme o esquema, em que um dos terminais do capacitor está conectado ao terra da fonte.
2. Ligue a fonte e observe as oscilações de tensão na tela, ajustando a tensão eficaz (RMS) da fonte para 5,0 V.
3. Regule a faixa de frequência para 5K no oscilador.
4. Varie a frequência da fonte da frequência mínima à frequência máxima da faixa (e algumas centenas de hertz até 5 kHz), tomando um número de pontos suficiente para completar a tabela com valores de V_C (RMS) em função da frequência f . *OBS: toda vez que mudar a frequência do oscilador, a tensão da fonte pode variar; portanto, regule-a a cada mudança de frequência, garantindo que o valor eficaz da tensão fique em 5,0 V.*

SEGUNDA PARTE - Medindo V_R

1. Repita exatamente o processo da primeira parte, intercambiando as posições de R e C , que para agora seja possível medir V_R (RMS) com o osciloscópio.

8 Questionário

1. (a) Faça o gráfico de $V_C \times f$ e ajuste aos dados o modelo teórico (25) através dos parâmetros ε_m e $\tau = RC$.
(b) Levando em conta as incertezas dos valores nominais e dos parâmetros ajustados, avalie se a teoria concorda com o experimento.
2. (a) Faça o gráfico de $V_R \times f$ e ajuste aos dados o modelo teórico (25) através dos parâmetros ε_m e $\tau = RC$.
(b) Levando em conta as incertezas dos valores nominais e dos parâmetros ajustados, avalie se a teoria concorda com o experimento.
3. (a) Com base nos ajustes anteriores, determine a frequência de corte $f_c = 1/(2\pi\tau)$ (e sua incerteza) para cada gráfico.
(b) Os valores diferem ou são compatíveis? Isso era esperado?
4. (a) Desenhe o diagrama de tensões teórico de circuito RC para o caso em que $f = f_c$;
(b) Qual a fase relativa entre a oscilação de tensão da fonte e a oscilação de corrente no circuito?
(c) Tente reconstruir o diagrama de tensões experimental para a frequência de corte. Se não houver dados para esta frequência exata, escolha frequência próxima ou utilize valores teóricos provenientes do modelo ajustado.

