Exp. 7
Ressonância num circuito RLC

FSC2143 - Laboratório de Física III
FSC5123 - Física experimental II

lemo.ufsc.br
Versão de 1 de abril de 2024

1 Objetivos

- Medir correntes e tensões em circuitos RC, RL, LC e RLC montados em série e alimentados por tensão alternada;
- Construir diagrama de tensões do circuito RLC;
- Observar o fenômeno de ressonância num circuito RLC e medir sua frequência de ressonância.

2 Teoria Básica

A ressonância é um fenômeno que permeia diversas áreas da Física e tem fundamental importância, tanto do ponto de vista didático quanto do ponto de vista de aplicações práticas, que vão desde as construções civil, naval e espacial até a concepção de dispositivos que trabalham na escala atômica.

Neste experimento, observaremos a ressonância elétrica num circuito RLC, aquele composto por uma associação em série de resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C), alimentada por uma fonte de tensão e corrente alternadas. A frequência angular ω da fonte pode ser escolhida pelo utilizador. O circuito é mostrado na Figura 1.

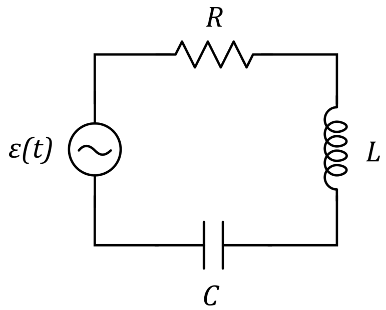


Figura 1 Circuito RLC alimentado por uma fonte de tensão de alternada: $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t)$, onde $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular da fonte, f é a frequência da fonte e ε_m sua tensão máxima.

2.1 Dinâmica do circuito RLC

Em experiências anteriores, vimos que, enquanto a tensão num resistor ôhmico é diretamente proporcional à corrente que o percorre, a tensão no capacitor é diretamente proporcional à carga acumulada nas suas placas. Aqui, introduzimos um novo elemento, o indutor, que é composto por uma bobina. Quando uma bobina é percorrida por uma corrente, forma-se um campo magnético em seu interior apontando na direção do seu eixo e estabelecendo um fluxo de campo magnético através da bobina. Se a corrente na bobina é variada, ocorre variação do fluxo magnético através da bobina. De acordo com a Lei de Lenz, a variação do fluxo, por sua vez, *induz* uma força eletromotriz nas espiras da bobina: daí o nome *indutor*. De fato, a tensão entre os terminais de um indutor é proporcional à *taxa de variação da corrente* que o percorre, ou seja, a dI/dt. A constante de proporcionalidade entre a tensão e a derivada temporal da corrente recebe o nome de indutância (L). Sua unidade no SI é o henry (H).

Componente	Propriedade	Unidade (SI)	Tensão
Capacitor	capacitância (C)	farad (F)	$V_C = \frac{1}{C}Q$
Resistor	resistência (R)	ohm (Ω)	$V_R = R\frac{dQ}{dt} = RI$
Indutor	indutância (L)	henry (H)	$V_L = L\frac{d^2Q}{dt^2} = L\frac{dI}{dt}$

Tabela 1 A tensão em cada um dos componentes do circuito RLC, expressa em termos da carga acumulada no capacitor, Q, cuja derivada temporal dQ/dt é a corrente elétrica I.

O sinal da força eletromotriz induzida nas espiras de um indutor tende a compensar a variação de corrente. Por exemplo, se a corrente é diminuída ($dI/dt < 0$), então a força eletromotriz induzida é positiva e tende a aumentar a corrente (uma espécie de inércia à variação de corrente). O resultado desse processo é que, quando um indutor é colocado em série com um capacitor, cria-se uma dinâmica restauradora de corrente que se assemelha à dinâmica do sistema massa-mola que se estuda nos cursos de mecânica[1].

Para entender o que é e de onde vem o fenômeno de ressonância, iniciamos pela aplicação da segunda lei de Kirchhoff, ou lei das malhas, ao circuito RLC da Fig. 1:

$$V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t) \qquad (1)$$

onde $V_R(t)$, $V_L(t)$ e $V_C(t)$ são as tensões no resistor, no indutor e no capacitor, que variam a cada instante de tempo. A tensão aplicada, portanto, se distribui entre os

[1] Uma analogia entre o circuito RLC e o sistema massa-mola se constrói da seguinte forma: a indutância L é equivalente à massa m; a capacitância C (na verdade o seu inverso) desempenha o papel da constante elástica k da mola; R desempenha o papel do atrito; e, finalmente, a corrente elétrica é equivalente à velocidade do objeto massivo ligado à mola.

três componentes de tal forma que a soma $V_R(t)+V_L(t)+V_C(t)$ é sempre igual à tensão da fonte $V(t)$, qualquer que seja o instante de tempo considerado.

Inserindo, na equação acima, as tensões V_R, V_L e V_C da Tabela 1, é possível chegar numa equação diferencial para a carga Q do capacitor. Ao resolver essa equação, encontra-se a carga do capacitor em função do tempo, $Q(t)$. Para encontrar a corrente $I(t)$ que circula no circuito, basta então tomar a derivada temporal de $Q(t)$.

O aluno interessado em se aprofundar, pode encontrar estes cálculos nas referências fornecidas. Para a realização deste experimento, podemos focar apenas no resultado da corrente, que é:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{\varepsilon_m}{|Z|}\cos(\omega t - \phi), \tag{2}$$

onde

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{3}$$

é o módulo da *impedância complexa* do circuito e

$$\phi = \cos^{-1}(R/|Z|). \tag{4}$$

Nota-se, portanto, que há uma defasagem entre a oscilação de corrente $I(t)$ no circuito e a oscilação de tensão $\varepsilon(t)$ da fonte, similarmente ao que pudemos observar no circuito RC em corrente alternada. Assim como naquele caso, vamos agora adotar a convenção de que a oscilação de corrente é a referência de fase, ou seja, vamos redefinir as fases de maneira que a fase da corrente seja nula. Isso irá naturalmente afetar a forma como escrevemos a oscilação da tensão na fonte[2]:

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t) \\ I(t) = I_m \cos(\omega t - \phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos(\omega t + \phi) \\ I(t) = I_m \cos(\omega t) \end{cases}. \tag{5}$$

Independentemente da referência de fase adotada, duas coisas permanecem verdadeiras: 1) a corrente no circuito oscila com a mesma frequência angular ω que a fonte; 2) corrente e tensão não oscilam necessariamente em fase. Detalharemos melhor as possíveis situações (corrente atrasada, adiantada ou em fase) quando falarmos mais adiante do diagrama de fasores do circuito RLC.

Ressonância no circuito RLC

A partir das equações (2) e (3), vemos que a amplitude da corrente depende da frequência angular ω:

$$\boxed{I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}. \tag{6}$$

[2] Pode ficar tranquilo(a)! Essa mudança de fase não altera em nada a física do sistema. Ela é equivalente a uma mera mudança de referência temporal, como se deslocássemos o instante definido como $t = 0$ para que as equações fiquem do jeito que a gente quer.

O denominador da equação acima atinge seu valor mínimo quando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad \text{ou seja,} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \equiv \omega_0. \tag{7}$$

Isto significa que a *amplitude* das oscilações de corrente no circuito (I_m) atinge o maior valor possível quando a fonte é posta a oscilar na frequência

$$\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}}, \tag{8}$$

conhecida como **frequência de ressonância** do circuito RLC.

Note que a frequência de ressonância **não** depende do valor da resistência R. Contudo, quanto maior a resistência, menor será o pico de corrente observado na frequência de ressonância, devido à maior dissipação de energia no resistor.

2.2 Impedância, Reatância e Resistência

Revisemos os conceitos de impedância e reatância, vistos na última experiência.

A partir da equação (2), vemos que o valor máximo I_m da corrente no circuito é proporcional ao valor máximo da tensão aplicada e vale $I_m = \varepsilon_m/|Z|$, o que pode ser reescrito como

$$\boxed{|Z| = \frac{\varepsilon_m}{I_m} = \frac{V_{rms}}{I_{rms}}}, \tag{9}$$

o que dá a **impedância do circuito em termos dos valores eficazes** efetivamente medidos pelo multímetro. Veja que a expressão acima para o módulo da impedância, $|Z|$, assemelha-se à definição da resistência ($R = V/I$). Por esta razão, dizemos que a impedância é uma espécie de generalização da resistência, especialmente útil quando tratamos de circuitos com corrente alternada contendo outros componentes além de resistores (neste caso, indutor e capacitor). Veja também que, na ausência do indutor e do capacitor ($L \to 0$ e $1/C \to 0$), a impedância é igual à resistência.

Lembremos, contudo, que a impedância é uma grandeza complexa, cuja parte real é a resistência e cuja parte imaginária é a reatância: $Z = R + \mathrm{i}X$. As grandezas R, X e $|Z|$ são grandezas reais, mensuráveis e têm como unidade do SI o ohm (Ω). Você possivelmente ouvirá alguma vez na vida que a impedância de algum equipamento é de tantos ohms. Neste caso, pode-se estar falando da sua resistência ou do *módulo* da sua impedância complexa.

Além da impedância, a *reatância* também é uma grandeza importante no estudo dos circuitos de corrente alternada. Ela diz respeito à forma como um circuito ou um componente do circuito "reage" ao estímulo de uma tensão alternada, o que dependerá em geral da frequência angular ω da tensão aplicada. O indutor, por exemplo, responde melhor para frequências mais altas, ao contrário do capacitor, que apresenta um tempo característico de carga que limita sua resposta para frequências demasiadamente altas. O resistor ideal não apresenta reatância, sendo indiferente à frequência do oscilador.

As reatâncias do indutor e do capacitor são assim definidas[3]:

$$X_L = \omega L \quad \text{e} \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \ , \tag{10}$$

lembrando que $\omega = 2\pi f$.

Com estas definições, valem as seguintes relações entre as **tensões eficazes** $V_{R,rms}$, $V_{L,rms}$ e $V_{R,rms}$ de cada componente do circuito e a **corrente eficaz** I_{rms} (que é a mesma em todos os componentes já que estes estão ligados em série):

$$\boxed{V_{R,rms} = R\,I_{rms}} \ , \quad \boxed{V_{L,rms} = X_L\,I_{rms}} \ , \quad \boxed{V_{C,rms} = X_C\,I_{rms}} \ . \tag{11}$$

Reparem na semelhança que essas equações têm com a lei de Ohm.

2.3 Diagrama de fasores

As equações (11) nos mostram que tanto a resistência quanto a reatância são grandezas que ligam diretamente a tensão à corrente, sugerindo que a resistência e a reatância são facetas diferentes de uma mesma grandeza: a impedância!

De fato, podemos reescrever a impedância do circuito RLC (equação 3) de uma maneira mais compacta:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}, \tag{12}$$

onde $X = X_L - X_C$ é a reatância total do circuito. Note como a resistência e a reatância do circuito contribuem da mesma forma no cômputo da impedância.

Combinando a equação acima com as equações (11) e (9), também podemos escrever equação análoga para as tensões RMS:

$$\varepsilon = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}, \tag{13}$$

onde suprimimos o subscrito *rms* para não carregar a notação. Manteremos essa maneira mais enxuta de escrever daqui pra frente.

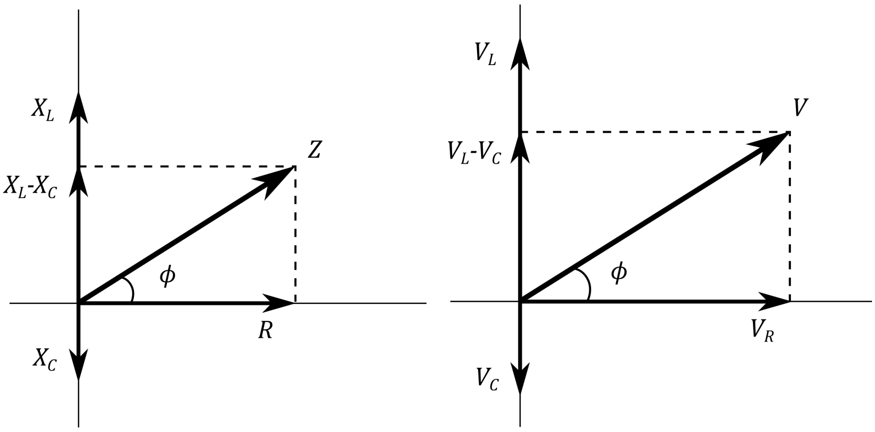
As equações (12) e (13) corroboram uma maneira muito comum de representar graficamente tanto a impedância quanto a tensão num circuito: o *diagrama de fasores*, ilustrado na figura 2.

Como vimos anteriormente, um *fasor* (ou vetor de fase) representa uma oscilação senoidal com amplitude, frequência e fase bem definidas. O módulo do fasor corresponde à amplitude e o ângulo do fasor corresponde à fase. Aqui, escolhemos a representação gráfica estática, em que a frequência do fasor não é explicitada no gráfico, ficando apenas subentendido que, num mesmo gráfico, todos os fasores representam oscilações com a mesma frequência.

No diagrama de fasores de impedâncias, a resistência é um fasor representado por um vetor na direção horizontal apontando para a direita; a reatância indutiva é

---

[3] A rigor, X_C carrega um sinal negativo. Aqui, suprimimos esse sinal negativo por conveniência de notação. Ele se manifestará "fora" de X_C, por exemplo, nas expressões do tipo $X_L - X_C$



(a) Diagrama de impedâncias (b) Diagrama de tensões

Figura 2 Diagramas de fasores para (a) impedâncias e (b) tensões. O ângulo ϕ é o mesmo nos dois diagramas e dá a fase relativa entre as oscilações de tensão e de corrente na saída da fonte. (a) Impedância total do circuito $|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$; (b) Tensão da fonte $\varepsilon = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$.

um fasor representado por um vetor na direção vertical apontando para cima; e a reatância capacitiva é um fasor representado por um vetor vertical para baixo. Os módulos destes vetores são medidos em ohms, em acordo com as grandezas que eles representam. A soma vetorial de X_L com X_C resulta num vetor que representa X e cujo módulo é $|X_L - X_C|$. A impedância Z do circuito é então representada pela soma vetorial de X e R, que resulta num vetor fazendo um ângulo ϕ com o eixo horizontal. O módulo deste vetor é justamente aquele dado na equação (12), como se pode perceber utilizando o Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos. O mesmo princípio pode ser utilizado para construir um diagrama de tensões, como na figura 2(b).

O ângulo ϕ discutido aqui é rigorosamente o mesmo que aparece nas equações (2) e (4). Pelo diagrama de impedâncias, nota-se que ele pode também ser escrito como

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right). \tag{14}$$

Utiliza-se o ângulo ϕ para classificar o circuito em três categorias:

- se $\phi > 0$, o circuito é *indutivo* e a tensão está *adiantada* em relação à corrente;
- Se $\phi < 0$, o circuito é *capacitivo* e a tensão está *atrasada* em relação à corrente;
- Se $\phi = 0$, o circuito é *resistivo* e a corrente e a tensão estão *em fase*.

O ângulo de defasagem ϕ, tem grande aplicação prática, relacionado à potência efetiva dissipada em circuitos RLC alimentados com corrente alternada. Enquanto, num circuito de corrente contínua, a potência dissipada P é dada por $P = \varepsilon I$, nos circuitos de corrente alternada, durante parte do ciclo, a energia é fornecida da fonte à componente reativa e, na parte restante do ciclo, uma porção da energia é devolvida da componente reativa à fonte. Assim, é possível mostrar que, durante o ciclo completo, a potência efetivamente dissipada pela componente resistiva do circuito é dada por:

$$P = V_R I = \varepsilon I \cos\phi \tag{15}$$

onde a quantidade $\cos\phi$ é denominada fator de potência do circuito, podendo variar de 0 ($\phi = 90^\circ$ e circuito puramente reativo) a 1 ($\phi = 0^\circ$ e circuito puramente resistivo).

As ferramentas apresentadas até aqui fornecem uma forma complementar de entender o fenômeno de ressonância. Como vimos, a ressonância surge no estudo do circuito RLC quando analisamos o comportamento da corrente como função da frequência de estímulo da fonte de tensão. Observa-se que, mantidos fixos os parâmetros R, L e C, existe uma frequência de ressonância f_0 para a qual a corrente no circuito é maximizada. Nesta condição, a amplitude de corrente I é máxima porque a impedância $|Z|$ tem valor mínimo, pois $X_C = X_L$ e, portanto, $\phi = 0$.

Uma maneira de verificar experimentalmente estas condições é medir a corrente como função da frequência e observar, em ressonância, a proximidade entre V_L e V_C.

3 Referência Bibliográfica

- Halliday, Resnick & Walker, *Fundamentos de Física*, Vol. 3, Ed. LTC

4 Relação do material

- 01 fonte AC (oscilador);
- 03 multímetros;
- 01 resistor metálico 100 Ω;
- 01 bobina 1500 espiras e $L = 56$ mH;
- 01 capacitor 0,68 μF ($\pm 10\%$);
- 09 cabos para conexões elétricas.

5 Esquema Experimental

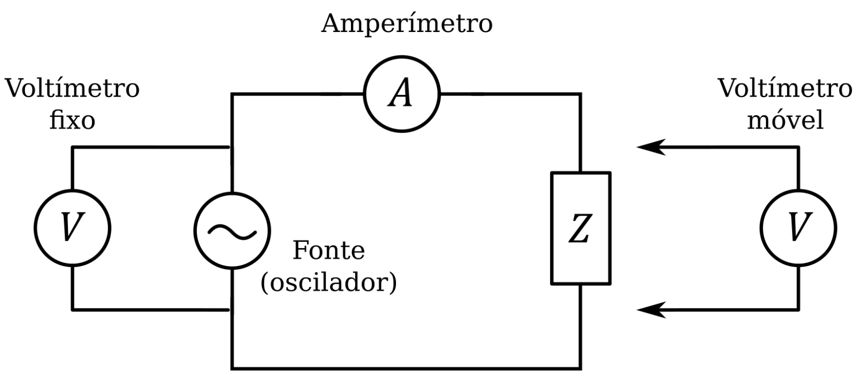


Figura 3 Esquema de montagem

6 Procedimento Experimental

PRIMEIRA PARTE - Circuitos

1. Monte o circuito conforme o esquema, utilizando como Z a resistência R.
2. Use a frequência de 1.000 Hz e amplitude máxima da fonte. Antes de ligar a fonte de tensão, se tiver dúvidas, solicite ao professor para verificar as conexões.
3. O objetivo é fazer 7 diferentes circuitos, onde Z será sucessivamente substituído por R, L e C, individualmente, e por RC, RL, LC e RLC, em série. Em cada um deles, você deverá medir a tensão total V, a corrente total i e as tensões V_R, V_L e V_C nos terminais de cada elemento do circuito (R, L e C). Ao completar as medidas de um dado circuito e antes de montar o seguinte, retorne a amplitude a zero. Anote suas medidas na Tabela I do relatório.
4. A partir dos dados da Tabela I, faça os cálculos necessários para preencher a Tabela II.

SEGUNDA PARTE - Ressonância

1. Nesta parte, monte o circuito LC. Utilize o amperímetro na mesma escala no decorrer das medidas. ***Observação:*** *mesmo sem resistor montado, a resistência da própria bobina combinada à resistência interna do amperímetro conferem ao circuito uma resistência total R. Ou seja, o circuito LC funciona, na verdade, como um RLC com resistência baixa.*
2. Ajuste a frequência do oscilador para 400 Hz e sua amplitude para 1,50 V (no voltímetro). Meça a corrente no circuito e as tensões no capacitor e no indutor, anotando os resultados na Tabela III. Repita as medidas para cada frequência lançada na tabela, verificando sempre que a amplitude está em 1,50 V.
3. Determine empiricamente a frequência de ressonância do circuito, ajustando a frequência da fonte até atingir a corrente máxima. *Não esqueça de manter a tensão na fonte em 1,50 V.*
4. Meça a corrente e as tensões no capacitor e no indutor, na condição de ressonância e também para uma condição fora da ressonância, isto é, para uma frequência arbitrariamente alta, acima dos valores fixados na Tabela III. Os resultados serão anotados nas colunas extra à direita da tabela.

7 Questionário

1. (a) A partir dos resultados da Tabela II para R, L e C nos diferentes circuitos, calcule os valores médios e respectivos desvios-padrão de R, L e C.
   (b) Estes valores experimentais são compatíveis com os valores fornecidos pelo fabricante?

2. Um indutor *ideal* é dotado apenas de indutância. Já um indutor *real*, apresenta também uma pequena resistência devida ao próprio fio de cobre de que é feita a bobina.
   (a) A partir das medidas do circuito L (V_L e I), e considerando desta vez a resistência ôhmica da bobina ($r_b = 14\ \Omega$), recalcule sua indutância.
   (b) O resultado difere significativamente daquele da Tabela II?

3. (a) Faça o diagrama de tensões (em escala) a partir das medidas no circuito RLC e determine o ângulo de defasagem ϕ entre a tensão da fonte e a corrente.
   (b) Conclui-se que o circuito era indutivo ou capacitivo? Por quê?

4. (a) Calcule a frequência de ressonância teórica para este circuito RLC usando os valores obtidos no item *a* da questão 1. Ela é compatível com o valor obtido experimentalmente?
   (b) Fixando o valor de L, para que valor de C este circuito entraria em ressonância com a frequência da rede elétrica (60 Hz)?

5. (a) Construa o gráfico de I em função de f com os dados da Tabela III, incluindo a frequência de ressonância. No mesmo gráfico, trace a curva teórica, descrita pela eq. (6), para efeito de comparação.
   (b) Calcule a impedância do circuito na ressonância, utilizando a tensão total aplicada e a corrente medida.
   (c) Da resposta ao item anterior, extraia o valor da resistência interna do amperímetro.

6. (a) Construa, num só sistema de eixos, os gráficos experimentais de V_L e V_C em função da frequência f da fonte, acompanhados de suas respectivas curvas teóricas. Mostre no relatório como você obteve essas curvas.
   (b) Na questão 3, classificamos o circuito em indutivo ou capacitivo para uma frequência de alimentação de 1000 Hz. Baseando-se nos gráficos do item anterior, descreva como esta classificação se modifica conforme é variada a frequência.

Exp. 7 - Ressonância no circuito RLC

GRUPO: ______________ ALUNOS: ______________________________

TURMA: ______________ ______________________________

DATA: ______________ ______________________________

➤ Primeira Parte - Circuitos

TABELA I Medidas	ε (V)	I (mA)	V_R (V)	V_L (V)	V_C (V)
R					
L					
C					
RL					
RC					
LC					
RLC					

TABELA II Cálculos	$\|Z\|$ (Ω)	R (Ω)	X_L (Ω)	X_C (Ω)	L (mH)	C (μF)
R						
L						
C						
RL						
RC						
LC						
RLC						

➤ Segunda Parte - Ressonância

TABELA III V = **1,50 V**

												Em ressonância	Frequência alta
f (Hz)	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400		
I (mA)													
V_L (V)													
V_C (V)													